

## TRABAJANDO CON MAPAS CONCEPTUALES EL TEMA DE LA PROPORCIONALIDAD DE 2º DE EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA (E.S.O.)

*Pozueta Mendiá, Edurne, Guruceaga Zubillaga, Arantza. San Fermin Ikastola, Zizur Menor, Navarra, Spain  
González García, Fermín M. Universidad Pública de Navarra, Spain  
Email: epozueta@sanferminikastola.com, agurutzeaga@sanferminikastola.com, fermin@unavarra.es*

**Abstract:** En este trabajo se presenta una experiencia acerca de la utilización de los mapas conceptuales (MMCC) en un tema de matemáticas. En concreto, el objetivo principal ha sido detectar en los estudiantes los indicadores propios del aprendizaje significativo (AS) a través del análisis de MMCC, en un contexto en el que los estudiantes de 2º de E.S.O. de la ikastola San Fermin han trabajado el tema de la proporcionalidad desde el área de las matemáticas. Previendo que los MMCC constituyen una herramienta inmejorable para potenciar el AS de los estudiantes en detrimento del aprendizaje memorístico (AM), esta herramienta ha sido utilizada en el diseño y la implementación de la instrucción referente al tema, así como, en la evaluación del conocimiento adquirido por los estudiantes. Los resultados obtenidos muestran la eficacia de los MMCC para el logro de un aprendizaje más significativo en los estudiantes considerados. Esta consideración se ha basado en los criterios para identificar los indicadores del AS en la valoración de los MMCC realizados por los estudiantes. Se han detectado, asimismo, diferentes patrones de MMCC que podrían ser considerados como valiosos predictores del aprendizaje.

### 1 Introducción: Consideraciones teóricas

En los últimos treinta años se han dado cambios muy profundos en la enseñanza de las matemáticas. La comunidad internacional de expertos en didáctica de las matemáticas sigue realizando esfuerzos por encontrar moldes adecuados, por lo que está claro que vivimos aún actualmente una situación de experimentación y cambio (Guzmán, 1993). Por una parte, nuestras sociedades occidentales, cada vez más desarrolladas científica y tecnológicamente, exigen un nivel alto de conocimiento matemático y valoran éste como uno de los conocimientos más importantes, por no decir el que más, pero por otra, cada día es mayor la conciencia, avalada por los datos recogidos por diferentes estudios como el Informe PISA 2003 (Programme for International Student Assessment), de que nuestros estudiantes no están matemáticamente alfabetizados (Rico, 2005).

Paralelamente se han producido aportaciones muy relevantes acerca del aprendizaje humano, aportaciones teóricas que han tenido gran influencia en el mundo de la educación. Una de ellas es la teoría educativa de Novak (1982) que propone que para conseguir un aprendizaje más activo y eficaz de los alumnos y para posibilitar que se produzcan en ellos cambios en la comprensión de la actividad matemática, hay que relacionar lo que ya se sabe acerca de la naturaleza del conocimiento y del aprendizaje humano con la enseñanza de las matemáticas. Su teoría de la educación sostiene que el AS es el resultado de la integración constructiva del pensamiento, el sentimiento y la acción que conducen a la capacitación humana para el compromiso y la responsabilidad. Desde su perspectiva constructivista, Novak (1988) hace hincapié en el concepto de AS tal y como Ausubel (1976) lo plantea en su teoría de la asimilación.

Novak (1998) señala que un problema fundamental en el aprendizaje de las matemáticas es que la mayor parte de los materiales de instrucción son conceptualmente poco claros, es decir, no presentan los conceptos ni las relaciones conceptuales necesarios para comprender el significado de las ideas matemáticas en cuestión. A la hora de diseñar e implementar instrucciones escolares que cumplan las condiciones del AS, se hacen necesarios instrumentos que faciliten dicho aprendizaje y el mapa conceptual (MC) es precisamente uno de ellos. Algunos de los trabajos presentados y publicados en las Actas correspondientes al First International Conference on Concept Mapping (Pamplona, 2004) se refieren a la aplicación de los MMCC en temas de matemáticas, como por ejemplo los trabajos de Afamasaga-Fuata'i (pp.13-20) en los que se subraya la utilidad de los MMCC como instrumentos que ayudan a los estudiantes a desarrollar una comprensión mayor y más profunda de ciertos tópicos matemáticos seleccionados, o el trabajo de Serradó, Cardeñoso y Azcárate (pp.595-602) en el que se resaltan los MMCC como instrumentos que facilitan la evaluación diagnóstica de los obstáculos surgidos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del conocimiento matemático, así como el valor de los MMCC como fuente de información que fomenta el desarrollo profesional del docente.

Desde nuestra experiencia como docentes uno de los temas más sugerentes en la enseñanza de las matemáticas es el de la proporcionalidad. Desde sus orígenes la proporcionalidad ha estado presente en el estudio del mundo que rodea al hombre. Así, por ejemplo, al no poder medir directamente distancias, el método ha sido buscar recursos para compararlas. Vemos aparecer la noción primero en Astronomía y después en las Ciencias en general, tanto a nivel de definir nuevas magnitudes como para expresar relaciones numéricas, trabajar con índices, constantes o tasas. Así pues, la proporcionalidad es un concepto básico en las Matemáticas y es un tema de gran importancia en el currículo escolar (Fiol y Fortuny, 1990), ya que está relacionado con la mayoría de los contenidos de Matemáticas y con los de otras asignaturas como Física, Biología, Química, etc.

En cuanto al desarrollo cognitivo encontramos en la teoría de Piaget (Piaget e Inhelder, 1972) una caracterización del mismo, ya que en la misma el razonamiento proporcional está indicado como la señal del nivel de las operaciones formales en los estadios de desarrollo definidos. Piaget abordó este tema principalmente en sus estudios referidos a la probabilidad, las leyes físicas y las relaciones espaciales. Según él, la noción de proporción se encuentra en el nivel de las relaciones formales, es decir, que las operaciones no se realizan directamente sobre los objetos sino que se trata de operaciones de operaciones. Siguiendo las ideas de Freudenthal (1978) los problemas de razonamiento proporcional pueden clasificarse en problemas que tienen razones internas y problemas que tienen razones externas. Las razones internas son razones entre términos pertenecientes a una misma magnitud, y las razones externas son comparaciones entre cantidades de dos diferentes magnitudes.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, pretendemos en este trabajo resaltar la utilización del MC como instrumento facilitador del aprendizaje significativo y en concreto, su utilización en la enseñanza/aprendizaje de la noción de proporcionalidad y los problemas correspondientes a la misma, haciendo hincapié por una parte en la razón entre cantidades diferentes de la misma magnitud y por otra, en la relación proporcional que puede existir entre dos magnitudes diferentes y las diversas formas en las que esta relación proporcional puede ser expresada.

## **2 Diseño y desarrollo de la investigación**

La elaboración del trabajo que presentamos ha sido posible gracias a la participación en uno de los subgrupos pertenecientes al equipo de investigación que desarrolló el proyecto GONCA (González y Cañas, 2004), financiado por el Departamento de Educación del Gobierno de Navarra. El proyecto GONCA respondía, entre otras cosas, al objetivo de evaluar la influencia que tiene la construcción de los MMCC, considerados como instrumentos de evaluación, enseñanza y aprendizaje, en el desarrollo del AS frente al aprendizaje memorístico. Así mismo, pretendía la utilización del programa informático CmapTools (Cañas *et al.*, 2004) para la elaboración de los MMCC por parte de los estudiantes. El software CmapTools fue desarrollado en el Institute for Human and Machine Cognition para permitir a los usuarios la construcción de mapas conceptuales a través de una interfaz muy sencilla y para posibilitar que los MMCC se pudieran guardar fácilmente en servidores que son accesibles para cualquiera en Internet.

En este trabajo queremos contrastar que el MC es un instrumento muy útil para diseñar un módulo instruccional (MI) innovador referente al tema de la proporcionalidad, así como para averiguar los conocimientos previos de los estudiantes en relación a este tema y analizar cual es la evolución de su aprendizaje. En este sentido, nos vamos a basar en el análisis comparativo de los mapas realizados por los estudiantes antes y después de la instrucción, siguiendo el modelo presentado por Guruceaga y González (2004) y según el cual podemos fijarnos en diferentes aspectos que presentan los MMCC (ver Tabla 1), de forma que el MC de un estudiante va a ser un instrumento que nos revela el grado de AS llevado a cabo por él, o por el contrario, si su aprendizaje ha sido menos significativo y más memorístico/mecánico. El análisis de los mapas realizados por los estudiantes también nos servirá para ver la posibilidad de agrupar los MMCC en varios grupos según características y tendencias comunes presentes en los mismos.

Este trabajo se realizó a lo largo del curso 2002-2003 en el centro concertado San Fermin Ikastola de la comarca de Pamplona. Se trata de un centro que escolariza a sus estudiantes en euskera y que acoge tanto niveles de infantil y primaria como de secundaria obligatoria y bachillerato. En concreto, la investigación fue llevada a cabo en el nivel de 2º de la E.S.O., en dos de las cuatro aulas de este nivel, y se trabajó el tema de la proporcionalidad desde el área de Matemáticas.

Tabla 1. Indicadores de aprendizaje.

Aprendizaje más significativo	Aprendizaje más memorístico/mecánico
<ul style="list-style-type: none"> <li>Diferenciación clara entre conceptos y palabras de enlace; aparece la direccionalidad en las relaciones entre conceptos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No hay una diferenciación clara entre conceptos y palabras de enlace; no aparece la direccionalidad en las relaciones entre conceptos</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Utilización de la mayoría de los conceptos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Utilización de un número menor de conceptos</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Hay una disminución de proposiciones erróneas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aparecen frecuentemente proposiciones erróneas: jerarquías conceptuales no lógicas</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Existe una organización jerárquica coherente desde el punto de vista de la naturaleza inclusiva de los conceptos</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aparece una organización jerárquica no correcta desde el punto de vista de la inclusividad de los conceptos</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Se identifica el concepto más inclusivo</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>No se identifican los conceptos más inclusivos</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Aparece algún ejemplo de supraordenación en algún concepto de naturaleza inclusiva</li> <li>Los conceptos más inclusivos presentan una compleja diferenciación progresiva</li> <li>Aparecen menos relaciones lineales entre conceptos o no aparecen en absoluto</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Aparecen relaciones lineales, estructuras en cadena entre conceptos</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Aparecen numerosos enlaces cruzados reveladores de reconciliaciones integradoras de calidad</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Se establecen pocos y erróneos enlaces cruzados, signo de unas reconciliaciones integradoras deficientes</li> </ul>

En cuanto al diseño del MI y para facilitar el AS, se ha tenido en cuenta la recomendación de Ausubel (1976) de considerar lo que los estudiantes ya saben con respecto al tema a trabajar en el aula. Los mapas previos realizados por los estudiantes se han utilizado para conocer el punto de partida de los mismos. Asimismo, Ausubel propone que al inicio de la instrucción se presenten los conceptos más inclusivos en referencia al tema a tratar, para trabajar después los conceptos más específicos. De ahí la necesidad de clarificar qué conceptos van a estar implicados en la instrucción a realizar, qué significado van a tener estos conceptos, cuáles son las relaciones jerárquicas y reconciliaciones entre los mismos y cuál es la relación entre este marco de referencia y lo que los estudiantes ya saben. Novak recomienda elaborar un MC de referencia, donde se estructuren los conceptos implicados, inclusivos y específicos, relacionados con el tema elegido, en este caso, la proporcionalidad. Una vez elaborado el MC de referencia (ver Figura 1), se pueden identificar los núcleos conceptuales más significativos en relación a los cuales se diseñarán las actividades y el orden temporal de las mismas.

La estructura de la instrucción se adaptó del Project LEAP (Learning about Ecology, Animals and Plants, 1995). En este planteamiento las actividades se agrupan en tres fases: introducción, focalización y resumen. En la primera se presentan y se trabajan los conceptos más inclusivos, a continuación se trabajan las diferenciaciones progresivas y reconciliaciones más significativas, y para terminar se establecen aplicaciones de la información manejada a lo largo de la instrucción. En el diseño de las actividades que conforman este módulo, que se escribió en euskera para su implementación directa en el aula, se utilizaron actividades publicadas en diferentes propuestas didácticas. En cuanto a la metodología, los estudiantes trabajaron individualmente en las fases de introducción y de resumen, y en pequeños grupos de cinco durante la fase de focalización. El trabajo en grupo no era la forma habitual de trabajo en el aula en las clases de matemáticas de la E.S.O., pero en general, el alumnado tenía una actitud positiva hacia el trabajo en equipo, salvo excepciones de casos muy individualistas y que aportaron poco al grupo. Durante la instrucción los estudiantes también realizaron más MMCC y para ello se sirvieron del software CmapTools, instalado en los ordenadores del aula de informática del centro escolar.

### 3 Discusión de los resultados

En esta investigación fueron analizados los MMCC previos y posteriores a la implementación de un MI innovador sobre la proporcionalidad, realizados por 32 estudiantes de los 63 que participaron en dicha experiencia. Los conceptos que se utilizaron para la realización de los MMCC de los estudiantes fueron los mismos que se utilizaron para la elaboración del mapa de referencia de la investigación, 25 conceptos tanto en el primer mapa como en el segundo. Tras el análisis de los mapas realizados podemos decir que la estructura cognitiva de los estudiantes se refleja más ordenada y jerarquizada después de la instrucción. Hay una utilización de un número mayor de conceptos para la elaboración del mapa después de la instrucción y la estructura cognitiva se ha enriquecido con la

incorporación del concepto *razón*, cuya naturaleza inclusiva ha quedado reflejada correctamente en más de la mitad de los casos. Basándonos en la tendencia que se aprecia entre los dos mapas comparados en cada caso, en la relación entre proposiciones erróneas o imprecisas y las proposiciones totales, podemos también decir que la estructura cognitiva de los estudiantes es más lógica. En los mapas posteriores a la instrucción se aprecia una tendencia a clarificar más y mejor los niveles jerárquicos, sobre todo, los superiores. En muchos casos ha habido una clara diferenciación de conceptos como *relación proporcional* y *proporción*, es el caso del 56% de los estudiantes, que han diferenciado uno u otro concepto. Estos conceptos son inclusivos en el mapa de referencia. Los enlaces cruzados que aparecen en los mapas posteriores nos indican que dos tercios de los estudiantes han reconciliado de forma integradora las diferentes formas de expresión de los dos tipos de relación proporcional. Además, podemos decir que los tres estudiantes que han diferenciado los conceptos *relación proporcional* y *proporción* también los han reconciliado, puesto que han definido una relación correcta entre ambos.

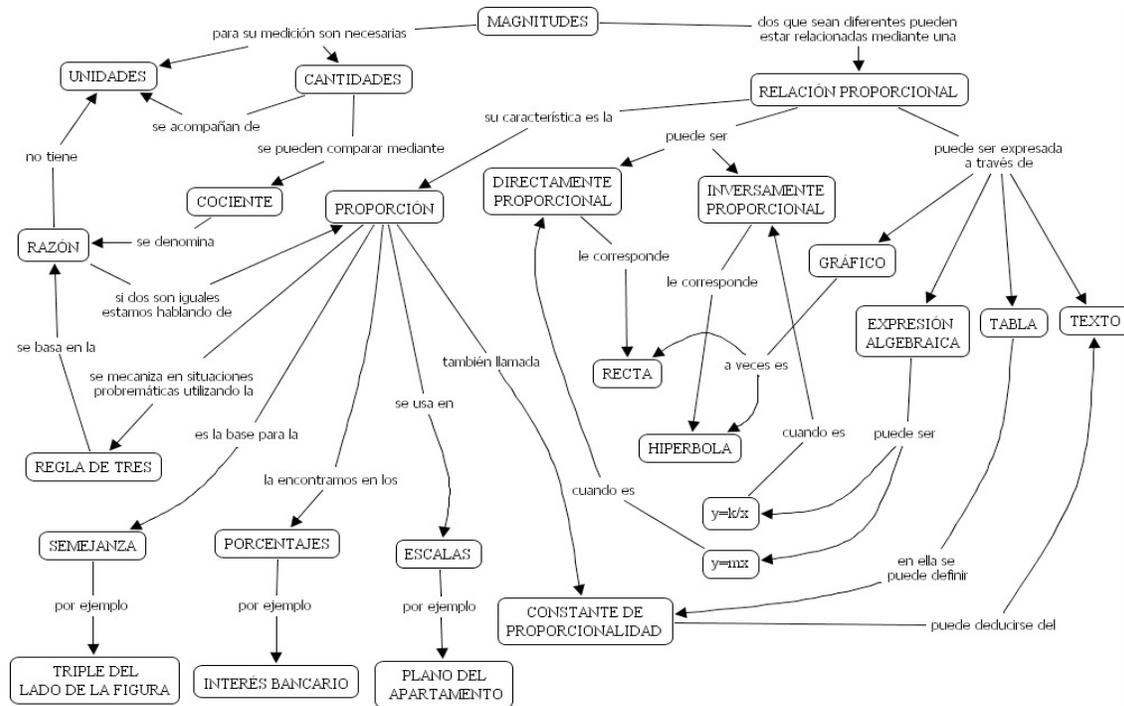


FIGURA 1. Mapa conceptual de referencia. (Pozueta, 2003)

Es interesante señalar en esta discusión la existencia de tres tendencias marcadas en los MMCC realizados por los estudiantes tras la instrucción. Este mismo hecho ha sido resaltado con anterioridad en un trabajo de González (1997). En dicho trabajo se muestran tres grupos diferentes de MMCC realizados por los estudiantes, según características comunes que aparecen en los mismos. En el caso que nos ocupa, podemos ver estas tendencias con características similares. Así, podemos ver una primera tendencia en tres de nuestros estudiantes donde se puede ver claramente el cambio que supone la nueva estructura del mapa realizado por el estudiante y que se asemeja muchísimo al mapa de referencia utilizado. Podemos apreciar los mapas anterior y posterior del estudiante I.I. (ver Figura 2 y Figura 3) como representante de este grupo de estudiantes. Este estudiante ha utilizado 14 conceptos en su mapa inicial, mientras que ha utilizado los 25 en el final.

Se puede ver cómo ha incorporado el concepto *razón* dándole un significado pleno al relacionarlo correctamente tanto con la *proporción* como con la *relación proporcional*. La relación proporcional adquiere el nivel jerárquico que le corresponde y quedan perfectamente definidas en otro nivel inferior las cuatro formas de expresión que se han trabajado en el MI para los dos tipos de proporcionalidad: la descripción verbal, la tabla, la fórmula y la gráfica. Están también reflejadas las relaciones transversales que se dan entre estos tipos de expresión. Asimismo, presenta en otro nivel jerárquico las tres situaciones matemáticas trabajadas en el módulo como ejemplos de proporcionalidad directa.

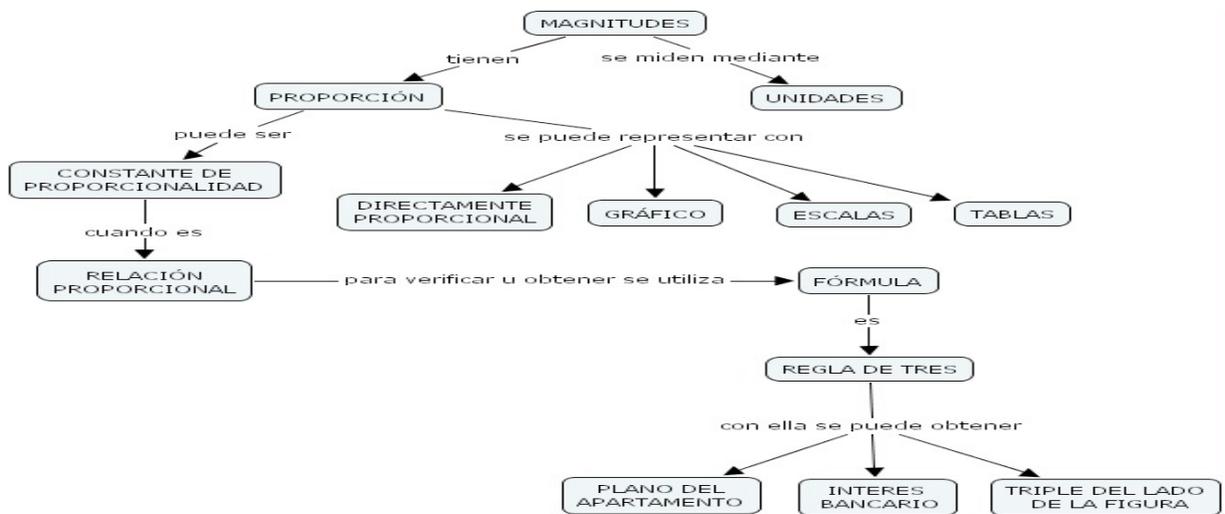


FIGURA 2. MAPA INICIAL DE I.I.

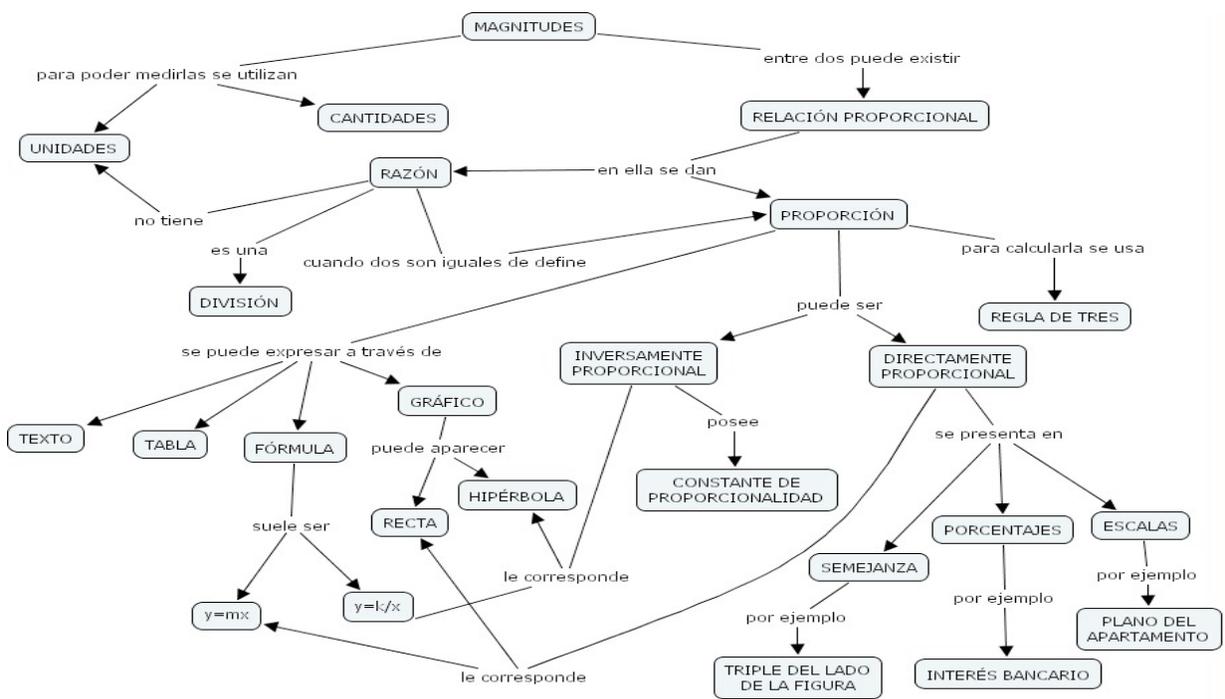


FIGURA 3. MAPA FINAL DE I.I.

Tenemos una segunda tendencia que queda reflejada en el segundo mapa de un grupo de 19 estudiantes cuyas características principales son que el concepto *relación proporcional* (o en su defecto el concepto *proporción*) aparece diferenciado, poseen pocas relaciones incorrectas, no presentan secuencias lineales, en general los niveles jerárquicos están definidos y se sigue la lógica de la disciplina y en algunos casos existen también reconciliaciones entre algunas formas de expresión y los dos tipos de relación proporcional. Esta tendencia queda representada en la evolución de los mapas del estudiante I.M. (ver Figura 4 y Figura 5). Observamos que en el primer mapa ha utilizado 19 conceptos y en el mapa final ha utilizado los 25 conceptos, apreciándose que ha dado un nuevo significado al concepto *razón*, así como al concepto *proporción*. Se puede observar una clara diferenciación del concepto *relación proporcional* con todos los conceptos subsumidos perfectamente colocados, sin embargo, en este



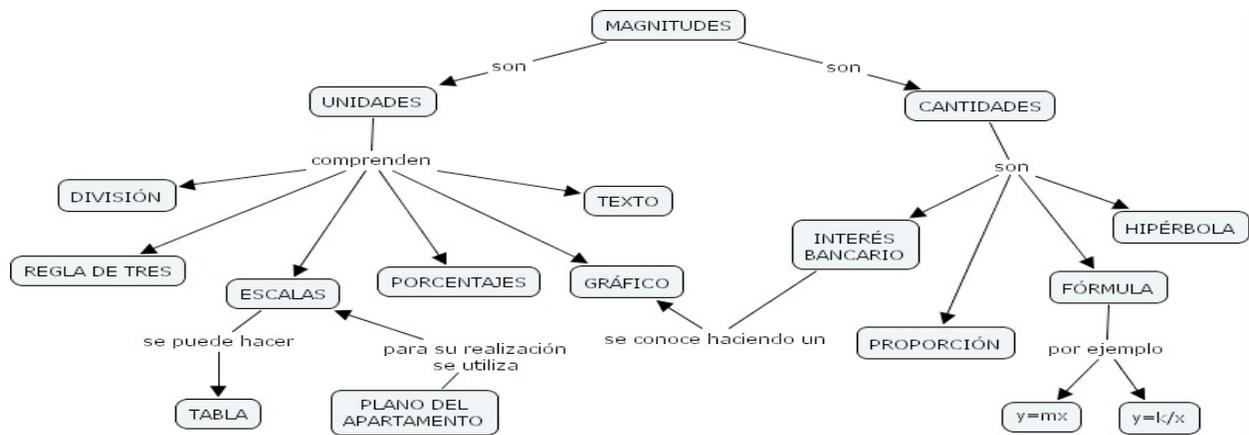


FIGURA 6. MAPA INICIAL DE H.Z.

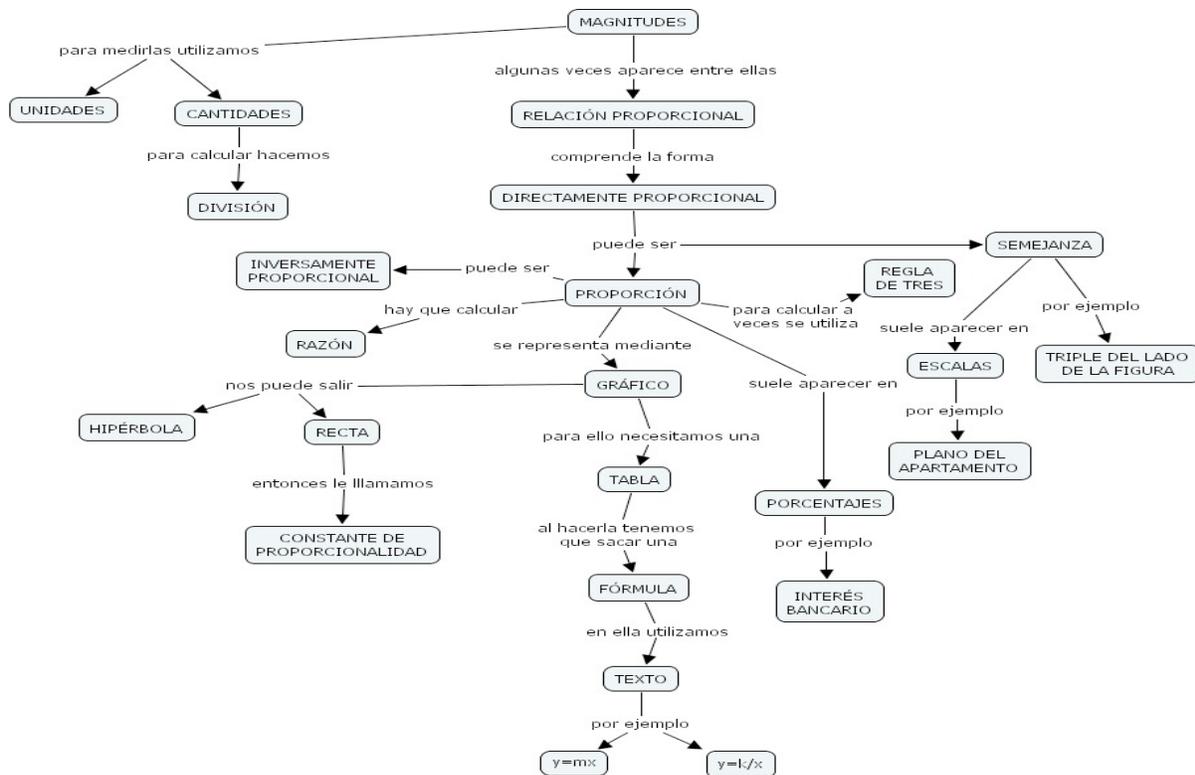


FIGURA 7. MAPA FINAL DE H.Z.

#### 4 Conclusiones

Consideramos que los resultados obtenidos de la implementación del MI innovador en relación al tema de la proporcionalidad, han sido muy positivos en relación al logro de un aprendizaje escolar más significativo. Esta consideración se basa en los criterios para identificar los indicadores del AS en la valoración de los MMCC realizados por los estudiantes. Por ejemplo, la utilización de un número mayor de conceptos en la elaboración de los mapas posteriores a la instrucción, la disminución significativa de errores o proposiciones poco precisas, la mejora en la clarificación de los niveles de jerarquía y su coherencia con la naturaleza inclusiva de los conceptos, la disminución de cadenas lineales y núcleos confusos entre conceptos y el aumento de diferenciaciones progresivas

reconciliadas integradoramente, son todos ellos claros indicadores de un aprendizaje más significativo por parte de los estudiantes. También resulta evidente que los estudiantes han tenido serias dificultades a la hora de identificar los conceptos inclusivos más importantes, y por lo tanto, esto ha dificultado que se pudieran establecer diferenciaciones progresivas más enriquecedoras y reconciliadas. Sin embargo, en nuestra opinión es importante señalar que en un contexto escolar convencional, el hecho de implementar un MI fundamentado teóricamente ha posibilitado que un grupo de estudiantes haya tenido la oportunidad de aprender más significativamente en relación al tema de la proporcionalidad. Se han detectado asimismo tres patrones claros de mapas. Sería interesante identificar en futuras investigaciones la presencia de diferentes patrones de MMCC realizados por nuestros estudiantes. La definición operativa de los mismos y el establecimiento de correlaciones con calificaciones correspondientes a su rendimiento académico, así como con diferentes rasgos de su personalidad, actitudinales y de conducta, podrían convertir a esos MMCC en valiosos predictores del aprendizaje. A través de un AS, como ha quedado patente en nuestra investigación, se podrían modificar convenientemente los patrones de mapas originales, predictores de efectos no deseados, y conseguirse así mejores resultados en la educación integral (cognitiva, afectiva y psico-motora) de nuestros estudiantes.

## 5 Agradecimientos

La investigación referenciada se desarrolló en el marco del Proyecto GONCA, y fue posible gracias a la ayuda económica otorgada por el Depto. de Educación del Gobierno de Navarra (Resolución 294/2001, de 27 de Dic.).

## 6 Referencias bibliográficas

- Afamasaga- Fuata'i, K. (2004). Concept Maps & Vee Diagrams as Tools for Learning New Mathematics Topics. En: A. J. Cañas, J. D. Novak & F. M. González (Eds.), *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proc. of the 1st Int. Conf. on Concept Mapping*, Pamplona, España: Universidad Pública de Navarra, pp.13-20.
- Ausubel, D.P., Novak, J.D. y Hanesian, H. (1976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Editorial Trillas.
- Cañas, A. J., Hill, G., Carff, R., Suri, N., Lott, J., Eskridge, T., et al. (2004). CmapTools: A Knowledge Modeling and Sharing Environment. En: A. J. Cañas, J. D. Novak & F. M. González (Eds.), *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proc. of the 1st Int. Con. on Concept Mapping* (Vol. I, pp. 125-133). Pamplona, España: Universidad Pública de Navarra.
- Fiol, M.L. y Fortuny, J.M. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Editorial Síntesis.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing-Preface to a Science of Mathematical Education*. Dordrecht: D.Diedel.
- González, F.M. (1997). Evidence of Rote Learning of Science by Spanish University Students. *School Science and Mathematics*, 97(8), pp.419-428.
- Gonzalez, F.M. y Cañas, A. J. (2004). GONCA Project: Meaningful learning using CmapTools. *Advances in Technology-Based Education: Toward a Knowledge-Based Society*, pp.747-750.
- Guruceaga, A. y González, F.M. (2004). Aprendizaje significativo y Educación Ambiental: análisis de los resultados de una práctica fundamentada teóricamente. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(1), pp.115-136.
- Guzmán, M. de y Gil, D. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*. Madrid: Editorial Popular S.A.
- Novak, J.D. (1982). *Teoría y práctica de la educación*. Madrid: Alianza Editorial S.A.
- Novak, J.D. (1988). Constructivismo humano: un consenso emergente. *Enseñanza de las Ciencias*, 6(3), pp.213-223.
- Novak, J.D. (1998). *Conocimiento y aprendizaje*. Madrid: Alianza Editorial S.A.
- Piaget, I. y Inhelder, B. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Buenos Aires: Paidós.
- Rico, L. (2005). Competencias matemáticas e instrumentos de evaluación en el estudio PISA 2003. *PISA 2003*. Madrid: INECSE. Ministerio de Educación y Ciencia.
- Serradó, A., Cardeñoso, J.M. y Azcárate, P. (2004). Los mapas conceptuales y el desarrollo profesional del docente. En: A. J. Cañas, J. D. Novak & F. M. González (Eds.), *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proc. of the 1st Int. Conf. on Concept Mapping*, Pamplona, España: Universidad Pública de Navarra, pp. 595-602.