

LOS MAPAS CONCEPTUALES EN LAS FASES DE APRENDIZAJE DEL MODELO EDUCATIVO DE VAN HIELE

Pedro Vicente Esteban Duarte, Universidad Eafit, Colombia
Edison Darío Vasco Agudelo, Universidad de Antioquia, Colombia
Jorge Alberto Bedoya Beltrán, Universidad de Medellín, Colombia
Email: *pesteban@eafit.edu.co, evasco@matematicas.udea.edu.co, jabedoya@udem.edu.co*

Resumen. El diseño de experiencias de aprendizaje de conceptos de un área del conocimiento es una tarea que requiere de bases pedagógicas y metodológicas que le ayuden a los profesores a encontrar las formas más eficientes de presentación de éstos a sus alumnos. En la enseñanza de conceptos matemáticos y geométricos el modelo educativo de van Hiele (van Hiele, 1957) ha sido de gran utilidad cuando se explora el nivel de razonamiento y la comprensión que adquieren los alumnos cuando son expuestos a diferentes formas de instrucción. El modelo está constituido por tres (3) partes: los niveles de razonamiento, las fases de aprendizaje y el *insight* y son una guía que orienta el proceso de instrucción y evaluación. Las fases de aprendizaje ayudan a determinar las actividades que deben desarrollar los alumnos para potenciar la comprensión y el avance de un nivel de razonamiento al siguiente. Se presentan los mapas conceptuales como una herramienta de exploración e integración para las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele. Los resultados expuestos son el producto de una experiencia de aula, en la que se desarrolló un módulo de instrucción, que contiene experiencias de aprendizaje para el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella.

1 Introducción

En la enseñanza de conceptos matemáticos y geométricos se requiere que los profesores presenten a sus alumnos experiencias de aprendizaje que reten su imaginación y no se queden en la propuesta de ejercicios algebraicos, rutinarios y sin contexto que no les ayuda a progresar en su nivel de razonamiento. Las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele son una forma de graduar la instrucción para ayudar a los alumnos a comprender los conceptos objeto de estudio en diferentes contextos con el objetivo de que ensanchen su estructura cognitiva y los puedan exponer a sus compañeros o así mismos utilizando el lenguaje natural, el lenguaje simbólico, la resolución y el diseño de problemas propios.

En el modelo educativo de van Hiele cada nivel tiene su propio lenguaje (van Hiele, 1957). Debido a esta característica, cuando se diseñan experiencias de aprendizaje con base en las fases de aprendizaje es necesario analizar el lenguaje empleado por los alumnos para referirse a los conceptos objeto de estudio. Es así, como en este aspecto, los mapas conceptuales guardan una estrecha relación con el modelo (Esteban & Vasco & Bedoya, 2004) y pueden implementarse en diferentes etapas de la instrucción.

En los últimos años de secundaria y en el primero de universidad se comienza a exponer el concepto de aproximación local que está relacionado con todos los procesos de paso al límite, tales como el de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella, el de derivada de una función en un punto, el de continuidad de una función en un punto, la convergencia de sucesiones y de series. La exposición se hace de manera intuitiva a partir de definiciones con palabras evitando la simbología necesaria que requiere un tratamiento riguroso. Es común creer que la comprensión de los procesos en los cuales está involucrado éste concepto no deberían presentar obstáculos para los alumnos. Por ello, se pasa rápidamente de las definiciones presentadas en forma verbal a los problemas algebraicos, sin tener en cuenta el razonamiento que es inherente a los conceptos que requieren el paso al límite.

En este artículo se presenta el diseño de un módulo de instrucción en base a las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele para ayudar a progresar a un grupo de alumnos del nivel 2 al nivel 3 de razonamiento del modelo de van Hiele. El concepto matemático elegido durante la experiencia es el de recta tangente a una curva plana en uno de sus puntos, que es una manifestación del concepto de aproximación local. En cada una de las fases se exploró el lenguaje utilizado por los alumnos y la forma como su estructura cognitiva se iba ensanchando a través de los mapas conceptuales.

2 Marco teórico

El modelo educativo de van Hiele (van Hiele, 1957) se formuló inicialmente para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría elemental. Este compuesto por tres (3) partes: (i) El *insight*, definido como comprensión (van Hiele, 1986). (ii) Los niveles de razonamiento, describen la forma como los estudiantes asimilan y efectúan diversas actividades a partir de un concepto geométrico, el modelo determina cinco (5) niveles y de acuerdo con la nomenclatura utilizada actualmente (Llorens, 1994) se clasifican en nivel 0, predescriptivo; nivel 1, de reconocimiento visual; nivel 2, de análisis; nivel 3, de clasificación y relación y nivel 4, de deducción formal. Los niveles de razonamiento no están asociados a habilidades computacionales o al desarrollo biológico del individuo, más bien están en función de las experiencias de aprendizaje a las que ha sido expuesto un individuo a lo largo de su vida con respecto al concepto objeto de estudio. Son jerárquicos y secuenciales, y por lo tanto una indicación de la gradación del razonamiento de un alumno a lo largo de las experiencias para la apropiación de un concepto. (iii) Las fases de aprendizaje, están orientadas a ayudar a progresar a un alumno desde un nivel de razonamiento al inmediatamente superior, básicamente las fases constituyen un esquema para organizar la enseñanza, son cinco (5) y se clasifican en fase 1, información; fase 2, orientación dirigida; fase 3, explicitación; fase 4, orientación libre y fase 5, integración.

En investigaciones recientes se ha extendido el modelo al Análisis Matemático, centrándose en la forma como razonan los alumnos frente al concepto de aproximación local en algunas de sus manifestaciones, como son: La tangente a una curva plana en uno de sus puntos (Llorens, 1994 & Esteban, 2000), la continuidad local (Campillo, 1999), la convergencia de una serie de términos positivos (Jaramillo, 2000), la modelización del espacio y del tiempo (De la Torre, 2000) y la convergencia de sucesiones (Navarro, 2002). En estas investigaciones se tenía como uno de sus objetivos determinar el nivel de razonamiento alcanzado por los alumnos cuando son expuestos a los conceptos estudiados en forma magistral, es decir, cuando el profesor expone los conceptos con poca o ninguna participación de los alumnos y se evalúa su desempeño con pruebas cerradas.

En cada uno de los trabajos mencionados se diseñaron tests semi-estructurados¹ con el fin de detectar del nivel 0 al nivel 3 de razonamiento. De acuerdo con el modelo, se establecieron descriptores para cada uno de los niveles estudiados que permitían la detección de los mismos a partir de la actividad de los alumnos. Los descriptores y los tests aplicados a los alumnos se diseñaron a partir de entrevistas de tipo socrático, buscando que las tareas propuestas recogieran la relación existente entre un determinado nivel de razonamiento y el lenguaje propio de este, teniendo en cuenta que su aplicación debe privilegiar la detección de los niveles de razonamiento sin confundirlos con niveles de habilidad computacional o conocimientos previos. Un resultado concluyente de estas investigaciones es que solamente la cuarta parte de los estudiantes que asisten a clases magistrales están el nivel 3 de razonamiento, que es el que les permite avanzar con éxito en el estudio de las matemáticas universitarias que se fundamentan en el concepto de aproximación local en manifestaciones como las de límite, derivada e integral.

El diseño de módulos de instrucción² (Fuys & Geddes & Tischler, 1988) que tuvieran como base las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele no se exploró en ninguna de las investigaciones referidas anteriormente. Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, cabe preguntarse ¿Qué sucede cuándo se diseñan un módulo de instrucción a partir de las fases de aprendizaje del modelo y se aplica a estudiantes que están en el nivel 2 de razonamiento?, ¿será posible que un mayor número de estudiantes progresen al nivel 3?

2.1 Las fases de aprendizaje en el modelo de van Hiele y los mapas conceptuales

En el modelo de van Hiele el análisis del lenguaje empleado para expresar un concepto es fundamental para la adscripción a un determinado nivel de razonamiento, al punto que cada nivel tiene su propio lenguaje, por ello una herramienta que facilita el análisis del lenguaje en el modelo (Esteban & Vasco & Bedoya, 2004) son los mapas conceptuales, que permiten determinar las relaciones y de esta forma obtener un acercamiento a la estructura cognitiva que un alumno posee en relación a un concepto en el momento de la elaboración del mapa.

¹ Cada pregunta tenía cinco (5) opciones de respuesta, de las cuales en la última el alumno podía escribir la que considerara más acertada en el caso cuando ninguna de las anteriores le pareciera correcta.

² Un módulo de instrucción es una colección de actividades diseñadas con un objetivo específico.

En las fases de aprendizaje se busca que a medida que se van aplicando el estudiante reelabore el lenguaje empleando con relación al concepto estudiado para que pueda progresar del nivel de razonamiento en que se encuentra al inmediatamente superior. Las fases de aprendizaje del modelo se definen de la siguiente manera:

- Fase 1. Información. Se explora mediante tests, entrevistas, gráficas o exposiciones realizadas por los alumnos. Con ello se busca que expliciten la información que tienen en su estructura cognitiva acerca del concepto objeto de estudio.
- Fase 2. Orientación dirigida. El profesor propone actividades en las que el concepto se relacione con situaciones de la vida diaria y anima a los alumnos para que encuentren sus propias relaciones, las compartan y discutan con sus compañeros.
- Fase 3. Explicitación. Los alumnos aplican el concepto para resolver problemas que correspondan a situaciones reales en diferentes contextos.
- Fase 4. Orientación libre. Se completa la red de relaciones que se comenzó a formar en las fases anteriores y se adquiere el lenguaje propio del siguiente nivel de razonamiento. Partiendo del concepto estudiado y de sus propios intereses los alumnos deben formular y solucionar sus propios problemas.
- Fase 5. Integración. El concepto estudiado se reorganiza y adquiere un nuevo significado. Se hace explícita la nueva red conceptual y el conjunto de habilidades de razonamiento adquiridas.

Debido a que en cada una de las fases los alumnos deben elaborar actividades concretas y presentar sus avances los mapas conceptuales son una herramienta que permite analizar estas tareas a lo largo del proceso. De esta forma, el mapa que se elabore al final de una fase le servirá de guía al profesor para diseñar o ajustar las actividades de la siguiente fase, pues los mapas conceptuales ayudan a desarrollar entre otras las siguientes destrezas cognitivas: (i) “Las conexiones con ideas previas, tanto al inicio del proceso, como después de su conclusión”, (ii) “La capacidad de inclusión, dada la jerarquización de los conceptos y el nivel que implica su relación”, (iii) “La diferenciación progresiva entre conceptos” y (iv) “La integración de nuevos conceptos a través de relaciones cruzadas válidas entre ellos” (Novak & Gowin, 1999).

El concepto de tangente a una curva plana forma parte del currículo de los últimos años de la secundaria y del primer año de universidad en las carreras científicas y técnicas. Debido a sus propiedades geométricas, este concepto se puede estudiar sin recurrir a manipulaciones algebraicas o algorítmicas, por ello se escogió para el diseño del módulo de instrucción que fue puesto en práctica con un grupo de estudiantes que se encontraban en el nivel 2 de razonamiento del modelo de van Hiele para ayudarlos a progresar al nivel 3.

2.2 *El concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en punto dado sobre ella*

La recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella es una manifestación del concepto de aproximación local. Para su estudio, se puede dotar de una componente visual y geométrica como el mecanismo³ del haz de secantes⁴ que es el que se encuentra en todos los libros de Cálculo. Este mecanismo le permite al alumno realizar razonamientos en los cuales está involucrado el proceso del paso al límite y a la vez le ayuda a hacer explícitos las elaboraciones mentales que efectúa para obtener sus conclusiones mediante el lenguaje. El hecho de poder definir la tangente utilizando aspectos geométricos y no algebraicos “... fue lo que permitió extender el modelo de van Hiele al campo del Análisis Matemático, en particular al concepto de aproximación local, llevándolo fuera del ámbito de la geometría elemental” (Esteban, 2000).

El conjunto de descriptores determinados para adscribir a un alumno en uno de los niveles 0 al 3 (Esteban, 2000) se basan en el mecanismo del haz de secantes. Para el nivel 2 se propusieron dos descriptores de separación que son una guía para diseñar experiencias de aprendizaje que pueden ayudar a los alumnos a progresar al nivel 3, se enuncian a continuación:

³ Otro mecanismo es el zoom, que se obtiene al fijar un punto A sobre una curva plana C. La tangente, si existe en A, es la recta a la que “parece” tender la curva cuando nos aproximamos más y más dejando fijo el punto A.

⁴ Dada una curva plana C y un punto fijo A sobre ella, se eligen puntos P_1, P_2, \dots, P_n , cada vez más cercanos por la izquierda o por la derecha de A. El conjunto de rectas que pasan por A y por los puntos P_1, P_2, \dots, P_n forman el haz de secantes. La tangente en A, si existe, es el límite del haz de secantes.

- “El alumno no dará, en general, respuesta a las situaciones patológicas, es decir, aquellas en las que exista alguna dificultad para realizar el proceso de aproximación. Por ejemplo, para la recta y para los ángulos (valor absoluto). En este nivel, el mecanismo del haz de secantes no se tiene como un mecanismo para encontrar la recta tangente para todas aquellas curvas en las cuales se puede aplicar, presentándose desconcierto en las situaciones patológicas. No define la tangente a una curva en un punto a partir del haz de secantes y la capacidad de deducción de propiedades no se tiene aún desarrollada, estas son diferencias que marcan la separación entre los niveles 2 y 3 de razonamiento.”
- “Un alumno no progresará desde el nivel 2 al nivel 3 mientras mantenga dualidades entre el concepto imagen (la progresión de las secantes que pasan por un punto A de la curva y por otros puntos situados sobre la curva cada vez mas cercanos a A) y el concepto definición (reconocer la tangente como el límite del haz de secantes, es un proceso infinito). El nivel de razonamiento que permite la comprensión de los conceptos avanzados o dinámicos es incompatible con la dualidad entre concepto imagen y concepto definición. La plena integración entre los conceptos intuitivos estáticos (tangente a una circunferencia) con los dinámicos (aproximación infinita mediante el haz de secantes) caracteriza el acceso al nivel 3.”

A partir de éstos descriptores queda manifiesta la importancia que tiene el lenguaje para la adscripción de un alumno en el nivel 2 de razonamiento y el progreso al nivel 3. Por lo tanto, las experiencias de aprendizaje que conformen el módulo de instrucción deben tener en cuenta la forma como los alumnos expresan los conceptos de punto, recta y curva involucrados para describir el de tangente. Por ello, los mapas conceptuales son una herramienta que ayuda desde el inicio de las experiencias a entender la estructura cognitiva y la evolución en el lenguaje que va teniendo un alumno a medida que el profesor pone en práctica el diseño en el aula de clase.

3 Los mapas conceptuales y su aplicación en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele

En este artículo solo se ilustran las actividades correspondientes a los mapas conceptuales en el diseño y aplicación de un módulo de instrucción basado en las fases de aprendizaje del modelo de van Hiele para ayudar a progresar a un grupo de alumnos del nivel 2 al nivel 3 de razonamiento en relación al concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto dado sobre ella.

Antes de comenzar con el análisis e interpretación de los mapas conceptuales presentados por los alumnos, se resalta el hecho de que ellos fueron instruidos en la elaboración de la técnica durante un periodo de dos semanas, con el fin de evitar errores en la creación de los mismos, ya que según Novak “algunas de las concepciones equivocadas puede que se deba simplemente a la falta de destreza con los mapas” (Novak & Gowin, 1999). Lo anterior buscaba que los alumnos realizaran mapas conceptuales más claros y sin el amontonamiento de conceptos para aumentar el grado de estructuración en la elaboración de los mismos.

Para lograr este propósito, se realiza el mapa conceptual expuesto en la Figura 1, denominado “mapa del experto”, con el fin de implementarlo como guía del proceso académico de instrucción al que fue expuesto un grupo de alumnos (grupo experimental), dentro del proceso de investigación. Además, de utilizarlo como herramienta base para realizar el proceso de evaluación del lenguaje empleado por los alumnos después de concluida cada una de las fases de aprendizaje donde era requerida la implementación de la técnica. Para dicho mapa, los términos y conceptos base son el de punto, recta, curva, tangente, haz de secantes y aproximación local.

Las experiencias de aprendizaje diseñadas se aplicaron a 39 alumnos seleccionados de un total de 154 del primer año de universidad. Dichos alumnos fueron clasificados en el nivel 2 de razonamiento con la aplicación del test “Curvas y Tangentes” diseñado por Esteban (Esteban, 2000). La duración de la intervención pedagógica fue de 30 horas. Los alumnos restantes continuaron con la clase magistral en la que se trabajaban los conceptos propios del Cálculo.

A continuación se muestran cuatro (4) mapas conceptuales representativos del grupo experimental para cada una de las fases donde se requería la aplicación de la técnica. Estos muestran el progreso en el lenguaje de los alumnos de acuerdo con los descriptores de separación presentados para avanzar del nivel 2 al nivel 3 de razonamiento.

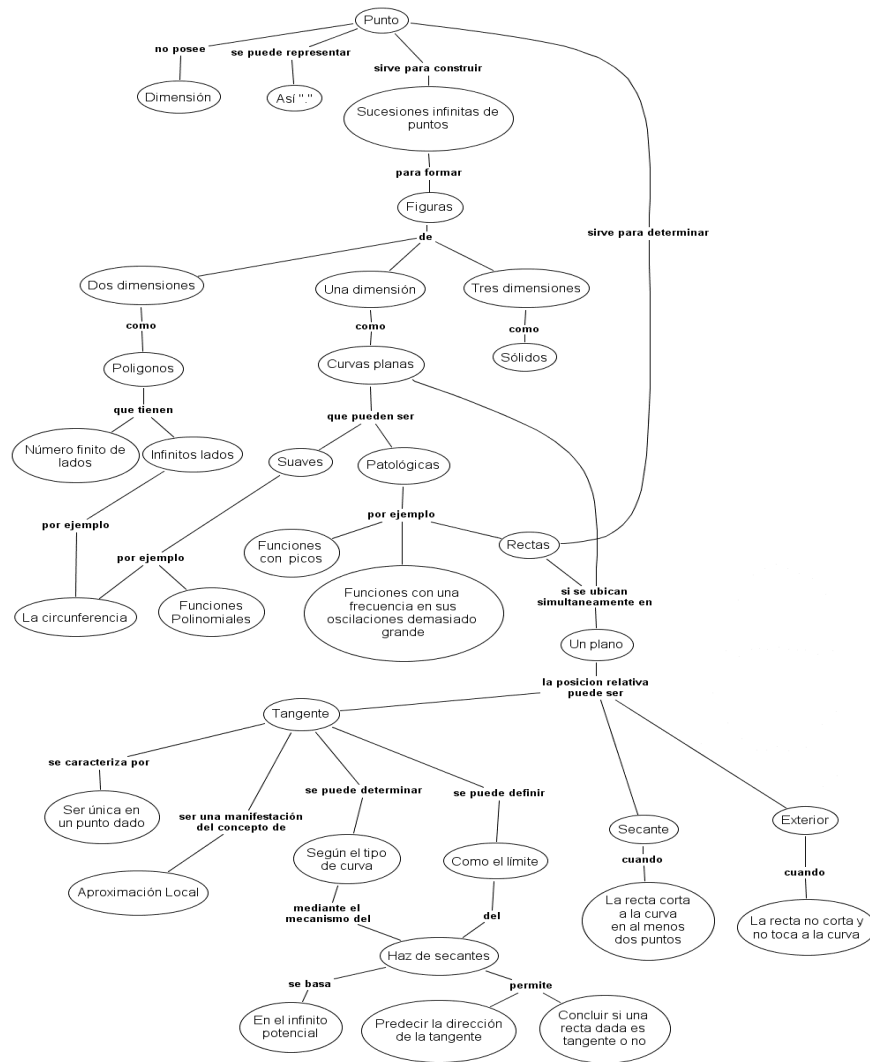


Figura 1. Mapa del experto, realizado por el grupo de investigación.

3.1 Fase de información

Debido a que esta fase de aprendizaje permite recopilar la información que poseen los alumnos en su estructura cognitiva acerca del objeto de estudio y los elementos que lo componen, se les pidió a los alumnos que realizaran un mapa conceptual con el fin de analizar las relaciones que realiza frente al concepto en su estructura cognitiva.

La Figura 2 muestra como el alumno relaciona algunos de los conceptos propuestos, por ejemplo el de punto, que es considerado objeto primitivo de la geometría. Además, define la recta tangente a una curva como “el tipo de recta que corta a la función en infinitos puntos, y corta a la circunferencia en un solo punto”, mostrando que no comprende claro el concepto y sigue manteniendo la idea de la definición de tangente a una circunferencia. Lo anterior es una evidencia de que los alumnos no consideran la necesidad de definir la recta tangente a través de una propiedad adicional que esta tiene: la de ser la recta de estabilización del proceso del haz de secantes. El mapa realizado para la fase 1 de la experiencia es representativo, ya que la mayoría de los alumnos sometidos a ella presentaron otros similares.

Con el análisis de los mapas presentados, se puso de manifiesto que era necesario mejorar las relaciones significativas entre los conceptos propuestos, la forma como comprenden estos y establecer las relaciones relevantes que les faltan para completar los elementos básicos de la red de relaciones del nuevo nivel. Creando la necesidad de diseñar experiencias de aprendizaje en las que el mecanismo se aplique a diferentes situaciones físicas y geométricas

que conlleven a la apropiación del concepto de infinito potencial, a la interiorización de la noción de aproximación y al establecimiento de su relación con el mecanismo seleccionado.

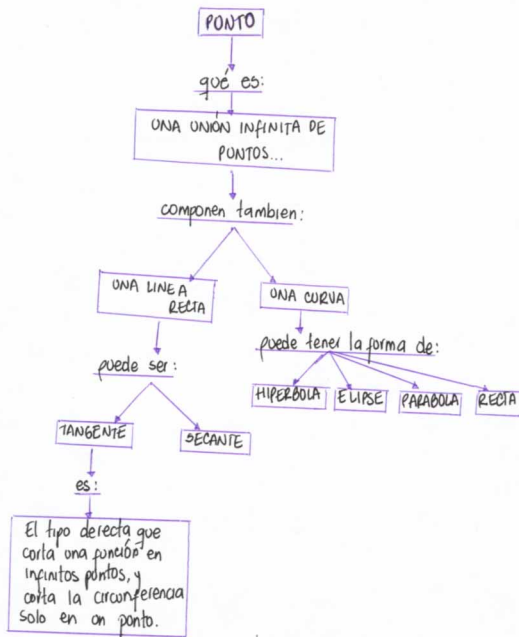


Figura 2. Mapa realizado para la fase de información.

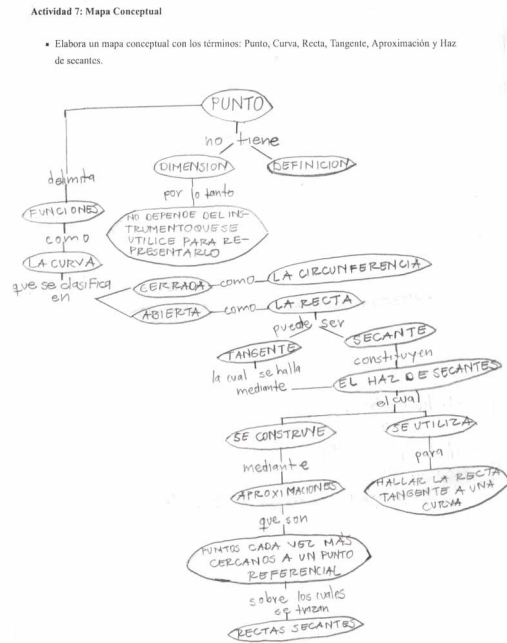


Figura 3. Mapa realizado para la fase de orientación dirigida.

3.2 Fase de orientación dirigida

A partir de esta información se diseñan las experiencias de aprendizaje para la fase 2. En ella cuando se les pide a los alumnos que realicen el mapa conceptual, y de su análisis se hace evidente (ver Figura 3) un progreso respecto a la fase anterior, pues los alumnos conservan los conceptos básicos, sus propiedades y adicionalmente relacionan el mecanismo del haz de secantes como una propiedad adicional para la definición del concepto de recta tangente, siendo esto último una condición necesaria para progresar del nivel II al nivel III de razonamiento del modelo educativo de van Hiele. Para esta etapa del proceso, se muestra un mejoramiento en la capacidad de razonamiento de los alumnos frente al concepto estudiado.

3.3 Fase de explicitación

En esta fase de aprendizaje los alumnos inician un proceso de separación de conceptos y establecen una jerarquía entre los términos utilizados al comienzo del mismo. Así mismo, los alumnos diferencian los procesos “mentales” de los procesos “físicos”, entendiendo el manejo del mecanismo como un proceso dinámico, totalmente diferente a la concepción que presentaban al inicio de la experiencia, donde afirmaban que “este proceso puede terminar”, ver la Figura 4. Es importante resaltar que si esta concepción no hubiese sido superada por alumnos la dualidad entre el concepto imagen y el concepto definición no les permitiría avanzar en su nivel de razonamiento tal como lo indican los descriptores separación del modelo para el concepto de tangente.

3.4 Fase de orientación libre

En esta fase los alumnos relacionaron el concepto estudiado con otros conceptos matemáticos o físicos como son el de velocidad y aceleración, y se les pidió que dibujaran curvas en las que no se pudiera utilizar el mecanismo del haz de secantes. Estas actividades fueron muy importantes pues a través de los mapas conceptuales se puede ver la evolución si se analizan los mapas de las Figuras 4 y 5.

3.5 Fase de integración

En esta fase se debe observar como el alumno ha reorganizado y reformulado su red conceptual entorno al concepto objeto de estudio. El mapa presentado en la Figura 5, resalta una de las características más importantes del aprendizaje significativo, que es una fuerte interacción entre los conocimientos más relevantes de la estructura cognitiva y el nuevo conocimiento adquirido. Esto se ve reflejado cuando el alumno construye relaciones entre el mecanismo del haz de secantes y los conceptos de límite y de derivada, que evidencia una ampliación considerable de su red de relaciones entorno al concepto de aproximación local.

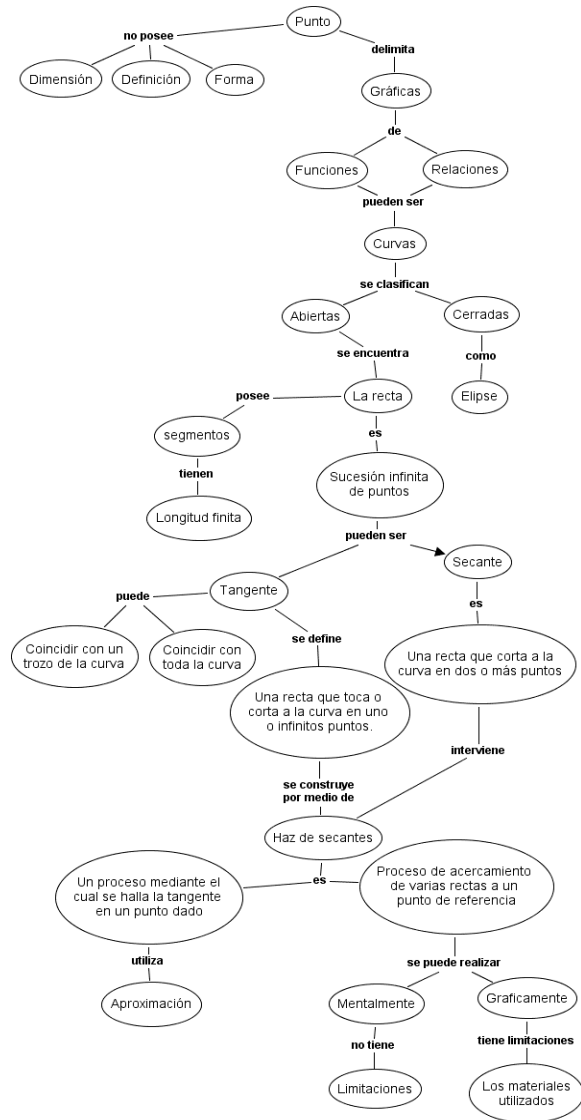


Figura 4. Mapa realizado para la fase de explicitación.

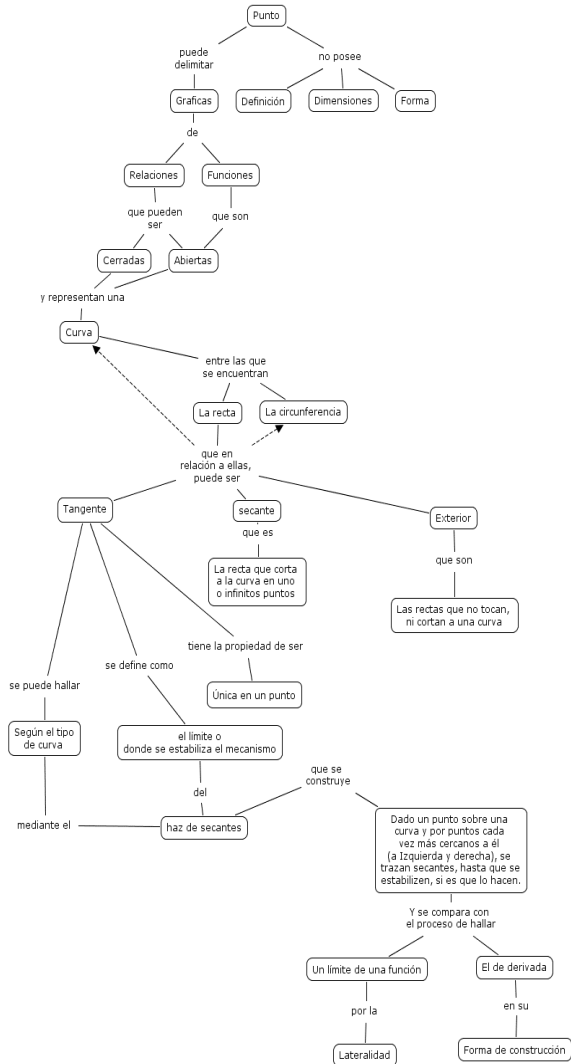


Figura 5. Mapa realizado para la fase de Integración.

Por la naturaleza de esta fase, el mapa de la Figura 5, muestra la evolución del lenguaje utilizado. Por ejemplo, cuando utilizan el concepto de curva y punto en varias partes del mapa (que no es lo ideal), cumple con el requisito de integrar varios conceptos que originalmente aparecían desligados dentro del mismo. La construcción de mapas conceptuales en cada una de las fases le ayudó a los alumnos a progresar en su razonamiento con respecto al concepto de recta tangente a una curva plana. Comprendieron que la tangente es un concepto dinámico y que para elaborar razonamientos a partir del mecanismo del haz de secantes deben hacerlo teniendo en cuenta el paso al límite que es su característica fundamental.

4 Conclusiones

La elaboración de mapas conceptuales enmarcados dentro del modelo educativo de van Hiele permite una nueva forma de exploración de las condiciones propias del modelo, especialmente en el análisis del lenguaje empleado por los alumnos durante la intervención pedagógica. Además, se puede hacer un mejor seguimiento y evaluación de la nueva red de relaciones, de la forma como ésta se va ampliando y mejorando durante el proceso propiciando el *insight* (la comprensión), objetivo fundamental del modelo de van Hiele. Así mismo, de los 39 alumnos participantes en el grupo experimental 38 progresaron del nivel 2 al nivel 3 de razonamiento. Además, todos los participantes mejoraron en la construcción de mapas conceptuales, en el uso del lenguaje y en la resolución de los tests propuestos en cada una de las experiencias de aprendizaje a las que fueron expuestos. Los resultados mostrados indican que el diseño de módulos de instrucción se puede continuar aplicando a otros conceptos del análisis matemático.

5 Reconocimientos

Este trabajo se enmarca en el proyecto de investigación “Una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite”, COLCIENCIAS 115-11-12704, y en el programa de Maestría en Educación con énfasis en docencia de las matemáticas, de la Universidad de Antioquia en convenio con la Universidad Eafit.

6 Referencias

- Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1989). Psicología educativa. Trillas, México.
- Campillo, Pedro (1999). La noción de continuidad desde la óptica de los niveles de van Hiele. PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia, España.
- de la Torre, A. F. (2000). La modelización del espacio y del tiempo: su estudio vía el modelo de van Hiele. PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia, España.
- Esteban, P. V. (2000). Estudio comparativo del concepto de aproximación local vía del modelo de van Hiele. PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia, España.
- Esteban, P. V., Bedoya, J. A., & Vasco, E. D. (2004). Los mapas conceptuales como herramienta de exploración del lenguaje en el modelo de van Hiele. *Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proc. of the First International Conference on Concept Mapping*, 2 (1):151–154.
- Fuys, David & Geddes, Dorothy & Tischler, Rosamond (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education, Monograph Number 3, Third printing 2002, USA.*
- Gutierrez J. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de van Hiele. *Teoría y práctica en educación matemática*, 1(4), 295–384.
- Jaramillo, C. M. (2000). La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele. PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia, España.
- Llorrens, J. L. (1994). Aplicación del modelo de van Hiele al concepto de aproximación local. PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia, España.
- Navarro, María (2002). Un estudio de la convergencia encuadrada en el modelo educativo de van Hiele y su correspondiente propuesta metodológica. PhD Thesis, Universidad de Sevilla, España.
- Novak, J. D., & Gowin, D. B. (1999). *Aprendiendo a Aprender*. Martínez Roca, Barcelona.
- Van Hiele, P. (1957). El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. PhD thesis.
- Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education. Developmental Psychology Series*, Academic Press Inc., Orlando.