Concept Maps: Making Learning Meaningful
Proc. of Fourth Int. Conference on Concept Mapping
Viña del Mar, Chile, 2010

UN EJEMPLO DE LA IMPORTANCIA DEL MAPA CONCEPTUAL COMO HERRAMIENTA INTEGRADORA ENTRE DISCIPLINAS

Mª Carmen García Llamas, Universidad Nacional de Educación a Distancia, España

Fernando Díez Rubio, Universidad Autónoma de Madrid, España

Email: fernando.diez@uam.es, mgarcia@cee.uned.es

Abstract. En el artículo que se presenta queremos mostrar cómo se pueden emplear los mapas conceptuales como herramienta facilitadora que ayude a entender qué contenidos de una materia son necesarias para el estudio de otra distinta. Vamos a comprobar cómo es posible, haciendo uso de los mapas conceptuales, relacionar dos disciplinas aparentemente muy diferentes como son las Matemáticas y la Economía. Para ello hemos desarrollado un ejemplo relacionado con las asignaturas de Matemáticas y la Teoría Económica, haciendo énfasis en los aspectos económicos relacionados directamente con elementos propios de las Matemáticas como pueden ser el Álgebra, el Cálculo, la Optimización, etc. Las mayores dificultades de la creación de un mapa de las características del que proponemos provienen de la necesidad de conocer en profundidad ambas disciplinas. Cuando esto no es posible se necesita un trabajo en equipo que permita a los especialistas de cada tema ir coordinando y componiendo los conceptos necesarios para elaborar el material conjunto de estudio. No debemos caer en la trampa de pensar que un mapa definido para explicar el papel de las Matemáticas como herramienta para el estudio de la Economía es algo cerrado y único. En cada momento podemos ampliarlo a medida que introducimos nuevos conceptos de la Teoría Económica que requieren de nuevas herramientas matemáticas, las cuales se van incorporando hasta alcanzar la configuración óptima del mapa conceptual.

1 Introducción

Actualmente los mapas conceptuales desempeñan un papel de importancia indiscutible como herramienta para el estudio y la adquisición de conocimientos en cualquier disciplina [Ballesteros, A.]. No en vano cada vez es mayor el número de docentes que lo emplean incorporándolos con naturalidad en el desarrollo de todo tipo de materias [Ontoria, A.]. Con este trabajo queremos poner de manifiesto un nuevo enfoque que demuestre la utilidad que tienen los mapas a la hora de conectar dos disciplinas bien diferenciadas. En el presente artículo vamos a comprobar cómo es posible, haciendo uso de los mapas conceptuales, relacionar dos disciplinas como son las Matemáticas y la Economía, destinada la primera a servir de herramienta de soporte para el estudio y compresión de la segunda. El enfoque que proponemos hace uso de los mapas de conceptos para mostrar cómo es posible justificar los contenidos matemáticos necesarios para la comprensión de la Teoría Económica.

Las Matemáticas son una de las materias que se emplean más frecuentemente a la hora de emprender estudios en distintas disciplinas o ramas de conocimiento. Los contenidos relacionados con el Cálculo o el Álgebra son los más habituales. En otras ocasiones los conceptos más necesarios son los relativos a las aplicaciones estadísticas. Así, por ejemplo, vemos como las Matemáticas son necesarias en el estudio de las ingenierías, en las licenciaturas o en los nuevos estudios de grado como pueden ser Física o Química. También hemos de incluirlas, aunque con contenidos diferentes, en los programas de estudios relacionados con la Economía o la Administración y Dirección de Empresas [Antomil, J.]. Tanto en los estudios de corte puramente científico como en estos casos se trabaja habitualmente con Álgebra, Cálculo y Estadística. En otros estudios relacionados con las ciencias de la salud como pueden ser Medicina o Psicología, la presencia de las matemáticas se centra casi en exclusiva a los temas de Estadística.

Por consiguiente vemos que hay que hacer una primera segmentación en cuanto a los temas de Matemáticas necesarios en cada caso. Por otra parte, el hecho de tener que incluir asignaturas de Cálculo para grados como Medicina o Economía, no quiere decir que estos vayan a tener los mismos contenidos en una titulación que en otra. Es por ello que en cada disciplina se debe crear un mapa motivador de contenidos adecuado a la propia disciplina. Por consiguiente en cada caso se debe desarrollar un mapa en el cual, a partir de los conocimientos que el estudiante debe adquirir, se van introduciendo los contenidos matemáticos que va necesitando. De esta forma daremos respuesta a la pregunta que, con frecuencia, plantean los estudiantes sobre ¿qué Matemáticas tengo que saber y para qué me van a servir? Los programas de matemáticas en los estudios en Economía o Administración y Dirección de Empresas incluyen temas de Cálculo y Álgebra [Sydsaeter, k.]

Con el propósito de ilustrar esta funcionalidad de los mapas conceptuales con un caso práctico hemos elegido un ejemplo sencillo sobre métodos fundamentales de Economía Matemática relacionado con los estudios de Economía y Administración de Empresas [Chiang, A.]. Al mismo se pueden ir añadiendo nuevas restricciones y elevando el grado de dificultad. De esta forma, con el incremento de conceptos económicos, se irán incluyendo nuevos contenidos matemáticos.

2 Las matemáticas de los precios del mercado

Si consideramos los Modelos Económicos como modelos matemáticos, se emplea un conjunto de ecuaciones que describen la estructura del modelo. Estas ecuaciones se obtienen cuando se establecen las relaciones pertinentes entre las distintas variables del modelo. Si llegados a este punto aplicamos las operaciones matemáticas convenientes a las ecuaciones, podemos intentar deducir un conjunto de conclusiones como resultado de nuestras hipótesis iniciales.

Una ecuación, por definición, identifica dos expresiones que tienen exactamente el mismo significado. Cuando una ecuación refleja la manera en que una variable responde a los cambios producidos en otras se denomina ecuación de comportamiento. En otras ocasiones las ecuaciones describen el prerrequisito para conseguir un equilibrio. Son las condiciones de equilibrio.

En cualquier caso la construcción de dichos modelos conlleva la elección de determinadas variables, ya que sería imposible tener en cuenta todos los factores que realmente intervienen. Cuando se construye un modelo y se dice que está en equilibrio se pone de manifiesto la falta de tendencia al cambio del mismo, salvo que se modifiquen las variables o las interrelaciones de estas en el modelo; por ello se le llama equilibrio estático. El problema típico en esta situación es hallar el conjunto de valores de las variables endógenas que cumplirán la condición de equilibrio del modelo. Podemos ilustrar esto con un “modelo de equilibrio parcial de mercado”, es decir, un modelo de determinación del precio en un mercado aislado.

Hasta aquí acabamos de introducir los primeros conceptos matemáticos que serán necesarios en los estudios de Economía: son los conceptos de variable, igualdad y ecuación. A partir de ellos podemos empezar a desarrollar el mapa de conceptos matemáticos que se muestra en la Figura 1.

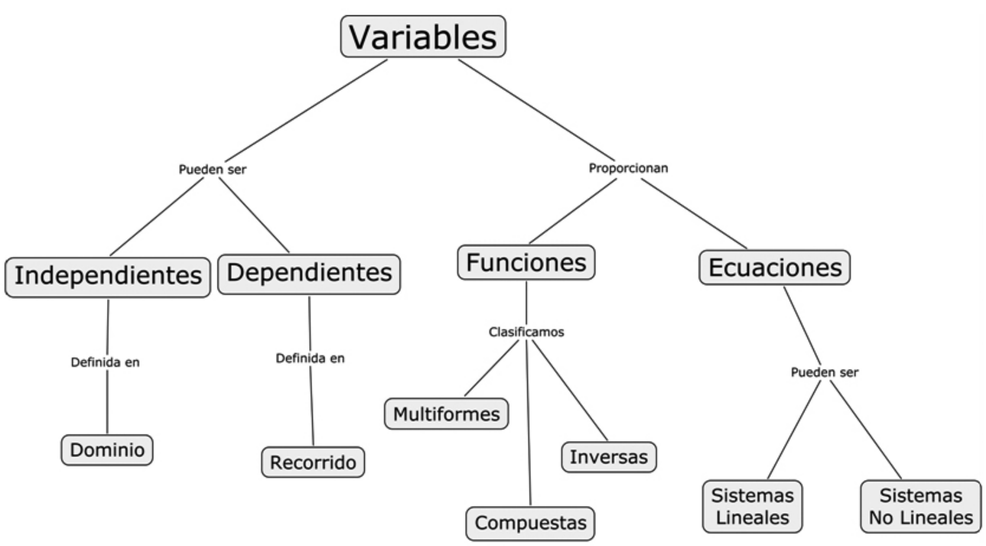

Figura 1. Primeros conceptos matemáticos.

Seguidamente vamos a establecer nuestro problema económico, es decir vamos a construir nuestro modelo. Lo primero que hemos de hacer es elegir las variables. En una primera aproximación consideramos un mercado con un único bien. Denotamos por Q_d la cantidad de bien demandada, por Q_S la cantidad ofertada y el precio del bien. Una vez elegidas las variables hemos de elaborar las hipótesis del modelo. Resulta evidente considerar como primera hipótesis que se alcanza el equilibrio en el mercado sí $Q_d - Q_S = 0$. Esta va a ser nuestra condición de equilibrio. En nuestro mapa de conceptos matemáticos, esto equivale a definir las ecuaciones que recogen las hipótesis propuestas.

A continuación nos planteamos cómo determinar los valores de Q_d y Q_S . Para ello vamos a suponer que se trata de un modelo lineal, es decir, las cantidades ofertadas y demandas son funciones lineales del precio (decreciente en el caso de la demanda y creciente en el caso de la oferta). En notación matemática podemos expresar estas condiciones como sigue:

$$Q_d = Q_s$$

$$Q_d = a - bP \qquad \text{con} \qquad a, b > 0$$

$$Q_s = -c + dP \qquad \text{con} \qquad c, d > 0$$

siendo a, b, c y d los parámetros del modelo.Nuestro mapa se va conformando como se muestra en la Figura 2. El diseño de mapa que proponemos consta de dos partes bien diferenciadas. Por una parte hemos ido desarrollando los contenidos propios de la disciplina (Economía) que aparecen en objetos rectangulares. Los contenidos matemáticos que vamos necesitando se introducen como objetos circulares. Los enlaces en negrita conectan ambos mapas:

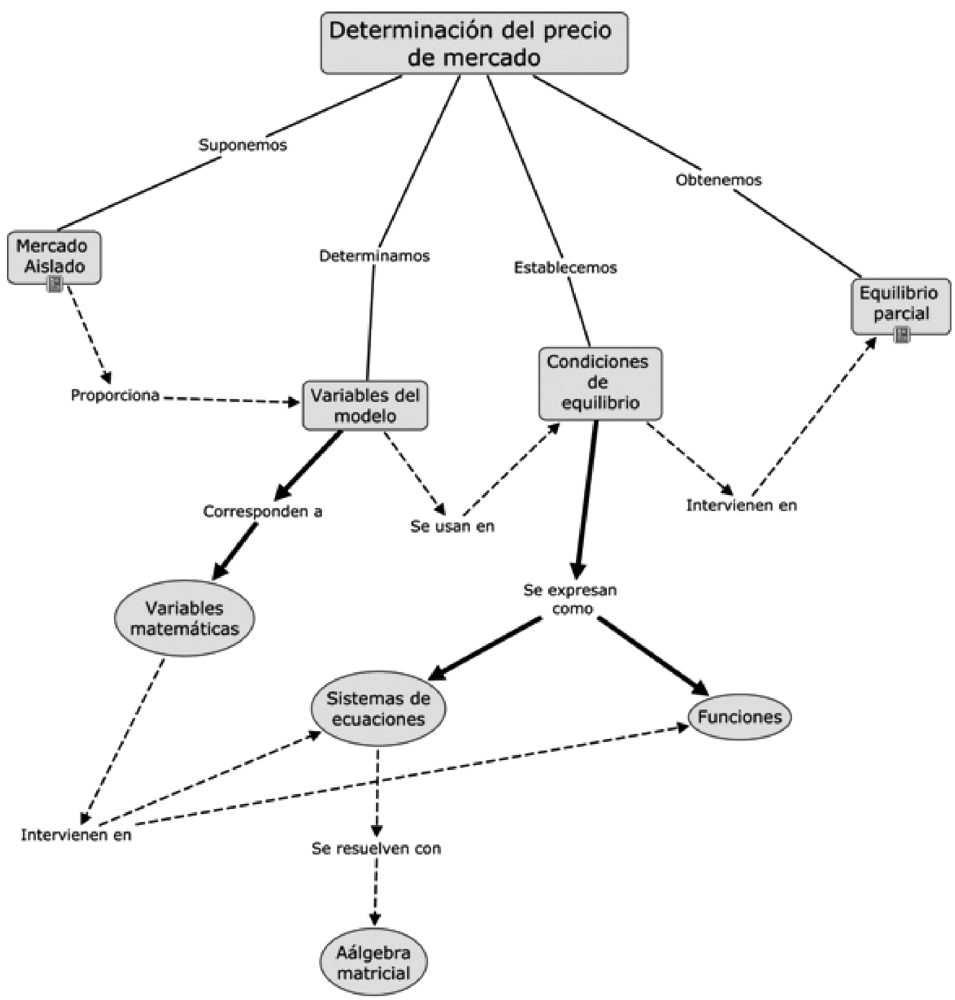

Figura 2. Matemáticas para determinar los precios de Mercado

Estamos introduciendo ahora el concepto de resolución de sistemas de ecuaciones lineales. La resolución se lleva a cabo usado distintas técnicas, y dada la sencillez del modelo es posible que lo único que necesitemos sean los métodos de sustitución, igualación o reducción o, inclusive, el método gráfico. Todos ellos se recogen en el mapa de la Ilustración 3 que se anida en nuestro mapa general.

Una vez seleccionadas las variables y definido el modelo subyacente al problema, el siguiente paso es obtener los valores de Q_d, Q_s y P que denotaremos por $\bar{Q}_d$, $\bar{Q}_s$ y $\bar{P}$. Como $Q_d = Q_s$ podemos reescribir $Q_d = Q_s = Q$ con lo que el modelo nos quedaría

$$\left.\begin{array}{l} Q = a - bP \\ Q = -c + dP \end{array}\right\}$$

Igualando y despejando llegamos a

$$\bar{P} = \frac{a+c}{b+d} \text{ y } \bar{Q} = \frac{ad-bc}{b+d}$$

Que es la solución de nuestro modelo. En ella hemos utilizado el método de igualación, pero se puede comprobar que es fácil resolver este tipo de ejercicios usando el método gráfico, motivo por el que se incluyen ambos en el mapa de la Figura 3.

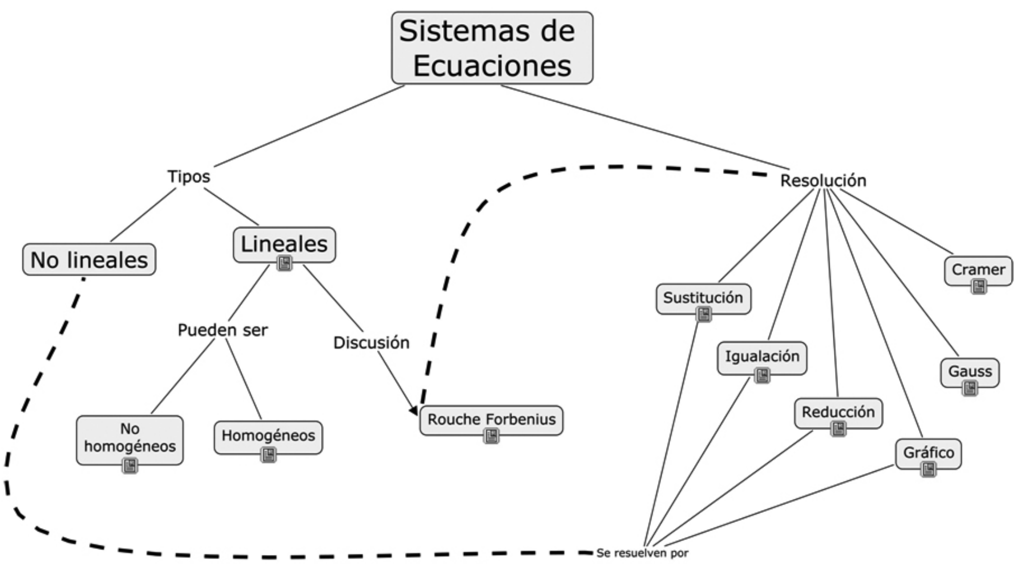

Figura 3. Mapa de conceptos sobre Sistemas de Ecuaciones

Una vez resuelta esta primera formulación de nuestro modelo podemos llevar a cabo un cambio en las hipótesis del mismo y suponer que, por ejemplo, la cantidad demandada es una función cuadrática del precio en lugar de una función lineal. Esto nos llevaría a introducir distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones. Añadimos, por tanto, nuevos conceptos al mapa que reflejen la necesidad de emplear funciones.

En el ejemplo anterior, las soluciones son relativamente sencillas de hallar, pero la realidad nos lleva a incorporar más variables (bienes) a nuestro modelo. Es decir vamos, por tanto, a estudiar el equilibrio general. Cada bien llevará asociado un conjunto de variables y ecuaciones que denotaremos por:

$$Q_{di} = Q_{di}\left(P_1, P_2, \ldots, P_n\right)$$
$$Q_{Si} = Q_{Si}\left(P_1, P_2, \ldots, P_n\right)$$

Y las correspondientes condiciones de equilibrio

$$Q_d - Q_S = 0$$

Que podemos reescribir como

$$Q_{di} - Q_{Si} = E_i\left(P_1.P_2,\dots,P_n\right) = 0$$

Obtenemos de este modo un sistema de n ecuaciones con n incógnitas y hemos de estudiar la existencia de solución del mismo y, caso de que exista dicha solución, calcularla. Una parte de este problema en el que se han modificado las condiciones es común al que teníamos inicialmente. Es decir, tenemos una primera fase de identificación de variables y declaración de hipótesis que no necesita nuevos conceptos matemáticos. Por ello lo único que se modifica inicialmente en el mapa es la inclusión del Modelo General, que corresponde al mercado con varios bienes, y la obtención del equilibrio que en este caso se denomina Equilibrio General.

La resolución de este tipo de problemas comienza a ser más engorrosa. Por ello inicialmente seguiremos trabajando con la hipótesis de linealidad en nuestras ecuaciones, pero aun así debemos buscar un método apropiado que nos facilite el trabajo cuando manejamos un sistema grande de ecuaciones simultáneas. Esto lo conseguimos gracias al álgebra matricial. Ésta herramienta matemática nos permite escribir los sistemas de ecuaciones de forma compacta mediante el uso de matrices, probar la existencia de soluciones mediante el estudio de los determinantes y, en su caso, hallar dichas soluciones. Utilizaremos para ello los métodos de Gauss-Jordan, o el de Cramer.

Por todo lo anterior se hace necesario incluir un bloque temático bastante amplio destinado al álgebra matricial. No debemos perder de vista el hecho de que, al introducir estos métodos de cálculo basados en el álgebra lineal, estamos suponiendo que existe linealidad en las ecuaciones del modelo. En ocasiones esta linealidad se obtiene si hacemos estudios locales, o realizamos operaciones que nos permitan transformar nuestras ecuaciones en lineales (tomando logaritmos, etc.). Gracias al álgebra matricial podemos hallar los valores de equilibrio de las variables que intervienen en el modelo (equilibrio estático). Ahora bien, no hemos dicho nada sobre la forma en la que llegamos a ese punto de equilibrio y sobre lo que ocurre por el camino.

Una vez obtenido un estado de equilibrio, el siguiente paso es la comparación entre diferentes estados de equilibrio que están asociados con diferentes conjuntos de valores de parámetros y de variables exógenas. Al realizar un análisis cuantitativo estamos llevando a cabo, de forma implícita, el análisis cualitativo, ya que el signo de la variación de la magnitud nos dará la dirección de cambio de la misma. Nos centramos por ello en el estudio de la tasa de cambio del valor de equilibrio de una variable endógena con respecto al cambio en un parámetro particular o variable exógena. Por este motivo el concepto matemático de derivada introducida como tasa de variación juega un papel primordial en el análisis estático comparativo del modelo. De esta forma hemos entrado en el campo del análisis matemático. Ahora nuestras ecuaciones las consideramos más bien como funciones y estamos interesados en estudiar su variación (derivadas). Debemos por tanto dar una serie de conceptos matemáticos que nos permitan abordar este problema con rigor [Sydsaeter, k.], y por ello incluimos en el programa algunas nociones relativas al estudio de funciones como son la determinación de sus dominios de definición, el estudio de la continuidad -para lo cual necesitamos el cálculo de límites-, y del crecimiento y decrecimiento de la función, es decir, las derivadas.

De la comparación de los distintos estados de equilibrio surge la necesidad de elegir el más conveniente. En Economía el criterio más común de elección de alternativas tiene como objetivo maximizar algún bien o cantidad (beneficio de una empresa, utilidad del consumidor, etc.) o, por el contrario, minimizar algún bien o cantidad (por ejemplo el coste de producción o el coste de un producto). Podemos catalogar estos dos tipos de problemas como problemas de optimización. Para la correcta formulación de un problema de optimización debemos identificar, en primer lugar, una función objetivo, cuya variable dependiente represente el valor a optimizar. El objetivo será obtener el conjunto de valores de las variables independientes (o variables de elección) que nos proporcionen el óptimo deseado de la función objetivo.

Una primera aproximación, considerando funciones objetivo con una única variable, nos lleva al desarrollo de un procedimiento basado en el estudio de la derivada primera para la determinación de los extremos. El estudio del signo de la misma nos permitirá decidir si se trata de un máximo o un mínimo. Para ello podemos hacer uso también de la derivada segunda. De esta forma vemos como, a partir de la variación en las condiciones de equilibrio establecidas en nuestro modelo de mercado, hemos introducido los conceptos de derivación y optimización. Sin embargo hemos visto anteriormente que es más realista considerar modelos más generales que llevan asociados un conjunto de variables y ecuaciones. En este tipo de problemas hemos de estudiar cómo afecta la variación de cada variable al resultado final, es decir hemos de estudiar las derivadas parciales de nuestra función.

En este caso también nos apoyaremos en el cálculo diferencial para la optimización de las funciones, si bien al trabajar con varias variables nos vemos obligados a introducir nuevos conceptos. Si nos centramos en el estudio de funciones de dos variables es fácil comprobar que, para determinar el crecimiento de nuestra función objetivo, lo que debemos estudiar es el signo de la forma cuadrática que se asocia a la diferencial de la función. Vemos pues justificado el estudio de los temas relacionados con la diagonalización de matrices, ya que nos basaremos en ello para decidir si la correspondiente forma cuadrática es definida positiva o negativa.

Si damos un paso más en el desarrollo de nuestro modelo económico vemos que, normalmente, cuando una empresa necesita resolver un problema de optimización, este suele venir acompañado de una serie de condiciones que denominamos restricciones. Por ejemplo, nos puede interesar maximizar el beneficio de una empresa teniendo en cuenta que por motivos de almacenamiento o de horario deben cumplirse determinadas condiciones. Los óptimos así obtenidos se denominan óptimos restringidos. Las restricciones se pueden introducir en forma de igualdades o de desigualdades.

La optimización restringida con condiciones de igualdad se puede llevar a cabo definiendo una nueva función objetivo que obtenemos al sumar a la función objetivo las funciones que asociadas a las restricciones premultiplicadas por escalares. A esta nueva función objetivo la optimizamos como indicamos anteriormente apoyándonos en las formas cuadráticas. La nueva función construida se denomina Lagrangiana, y los escalares empleados con las restricciones se denominan Multiplicadores de Lagrange.

Por otra parte, si las condiciones impuestas a nuestro problema de optimización vienen dadas por desigualdades se debe aplicar un método de trabajo distinto. Es fácil comprobar que en el caso de dos variables, el problema se puede resolver mediante la representación gráfica de la región factible y de la función objetivo (dando distintos valores). Cuando el problema involucra más de dos variables, la representación gráfica no es posible. En esos casos se utiliza la programación matemática. Estos conceptos quedan reflejados y relacionados en el mapa de la Figura 4.

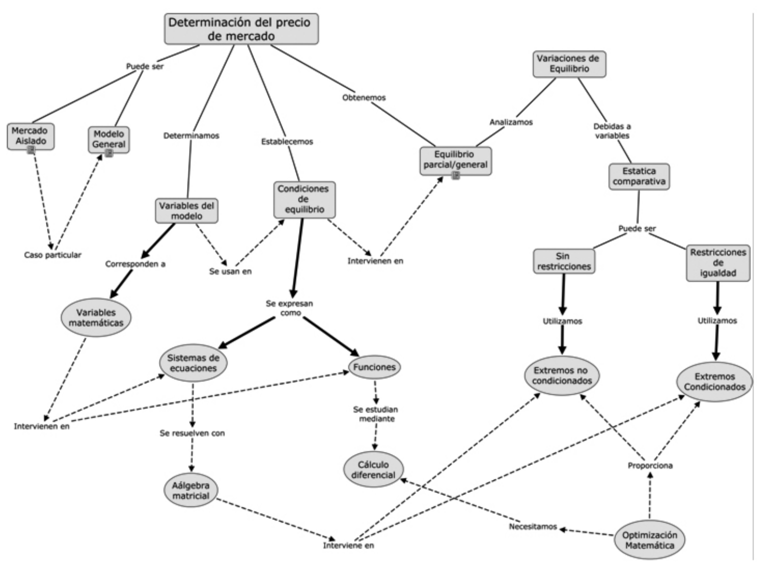

Figura 4. Estática Comparativa y Variaciones del Equilibrio

Por el momento los problemas que hemos planteado los hemos estudiado desde un punto de vista estático, es decir, sin tener en cuenta la evolución temporal de los mismos. La evolución temporal la podemos introducir de dos formas distintas, considerando el tiempo como una variable continua, es decir en cada instante ocurre algo distinto a la variable, o como una variable discreta, en este caso la variable experimenta algún cambio sólo una vez en cada periodo de tiempo considerado. Cuando se considera el tiempo como una variable continua, la derivada expresa la variación que se produce en nuestra función. Tenemos de este modo las ecuaciones diferenciales como representación de la evolución temporal de nuestros problemas. Los problemas más sencillos en este tema se resuelven simplemente aplicando las distintas técnicas de integración. Si vamos completando nuestro problema con derivadas sucesivas, esto nos lleva a la utilización de las ecuaciones diferenciales como herramienta para resolver nuestros problemas. Por otra parte, si consideramos el tiempo como una variable discreta, los métodos de resolución serán distintos. En este caso estamos ante problemas de ecuaciones recurrentes o ecuaciones en diferencias finitas.

Como vemos, en cada momento podemos ir trabajando sobre el problema económico y, a partir del mismo, introducir las herramientas matemáticas según nos vayan siendo necesarias. Sin embargo esto no resulta operativo, pues en ocasiones deberíamos parar el desarrollo de los contenidos económicos para avanzar en contenidos matemáticos. Por ello se estudian como asignaturas independientes, si bien los mapas pueden ser una valiosa ayuda a la hora de motivar la introducción de los distintos contenidos.

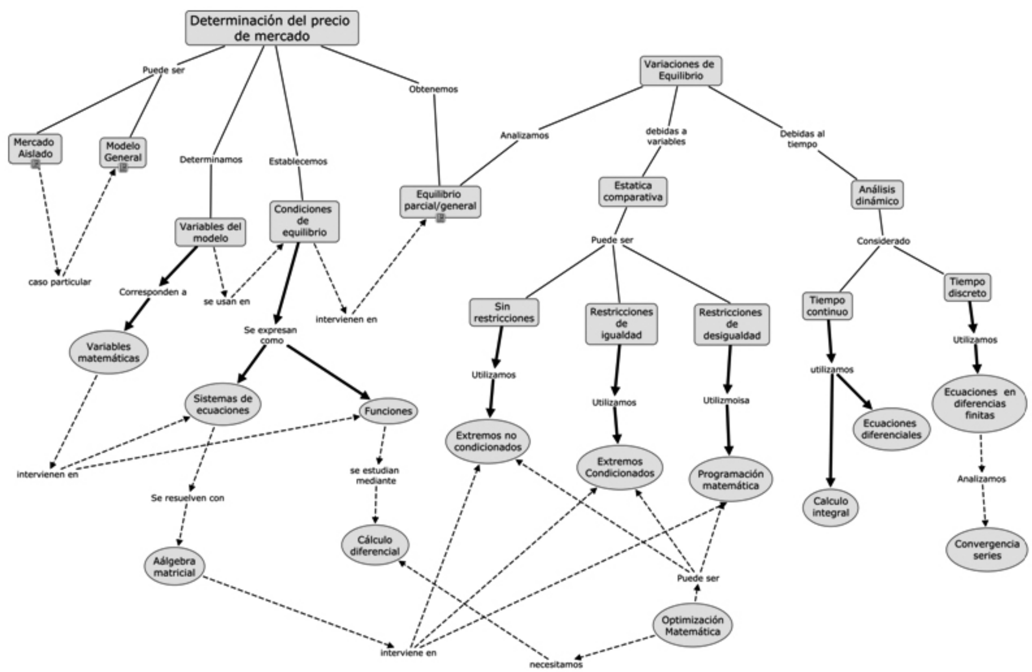

Figura 5. Matemáticas para la determinación de los Precios de Mercado

El siguiente paso sería el desarrollo de mapas más detallados y adecuados a cada disciplina en los que se detallen los contenidos que se deben introducir para resolver un problema concreto y en los que se podría llegar a un mayor desarrollo de los contenidos. El mapa al que se llega en este artículo, Figura 5, supone una aproximación con referencias a contenidos muy genéricos, si bien es posible llegar a un nivel de especificación mayor. Se pueden ver mapas con propuestas de los contenidos que se incluyen en los estudios de Economía o Administración y Dirección de Empresas en las universidades de la Comunidad de Madrid en [García, M.C.]

3 Conclusiones

En el artículo se muestra la utilidad de los mapas conceptuales para la integración de materias de contenidos diferenciados, la cual va más allá de ser una herramienta de adquisición de conocimientos. Hemos visto con un ejemplo el importante papel que desempeñan los mapas a la hora de establecer relaciones entre distintas disciplinas, como en el caso de las Matemáticas y la Economía. La primera está destinada a servir de herramienta de soporte para el estudio y compresión de la segunda. El enfoque que proponemos hace uso de los mapas de conceptos para mostrar cómo es posible justificar los contenidos matemáticos necesarios para la comprensión de la Teoría Económica.

En este mismo sentido creemos que sería conveniente que en todas aquellas materias de estudio en las que se usan los conocimientos adquiridos en otras disciplinas, se definieran mapas similares al presentado en el artículo. De este modo sería posible diseñar planes de estudio y de trabajo perfectamente coordinados en los que el estudiante supiera en cada momento cuál es la utilidad aplicada de los conceptos que está estudiando.

La elaboración de mapas como el propuesto la estamos efectuando como parte de la labor docente que llevamos a cabo en la UNED para el desarrollo de los nuevos grados en el marco del Espacio Europeo de Educación superior (EEES) [García, M.C.]. En las siguientes etapas hemos de desarrollar mapas que detallen, para cada unidad didáctica del temario de Matemáticas en las titulaciones de Economía, ADE y similares, los conceptos matemáticos que se deben introducir para desarrollar los contenidos necesarios. En este sentido es posible, e inclusive recomendable desde un punto de vista metodológico integrador, definir mapas similares entre distintas asignaturas de un mismo título, de forma que en cada momento podamos visualizar en qué punto del programa vamos a necesitar recordar o ampliar contenidos que no están realmente incluidos en el programa de la asignatura objeto de estudio. De este modo podemos llegar a establecer mapas que reflejen el perfil que se conseguirá al finalizar el título que se está estudiando, lo cual puede permitir a los estudiantes orientar sus esfuerzos para obtener la formación más conveniente para la especialización que desea conseguir. Para llevar a cabo este trabajo es necesaria la colaboración entre los docentes encargados de las distintas materias, los cuales deberán realizar mapas en los que se establezcan que contenidos de otras materias son necesarios en el desarrollo de su propia materia, así como el momento más adecuado para que estos se vayan incluyendo.

Referencias

Antomil, J., Arenas Parra, M., Bilbao Terol, A., Pérez Gladish, B., Rodríguez Uría, M. V. (2006): La utilización de mapas conceptuales en las asignaturas de matemáticas para la economía en el marco del espacio europeo de educación superior. Rect@ año 2006 Volumen: Actas_14. Fascículo 1.

Ballesteros, A.; Cuevas, C.; Giraldo, L.; Molina, I. (1992). Mapas conceptuales una técnica para aprender. Editorial Narcea.

Chiang, A.C. (1987): Métodos fundamentales de economía matemática. Editorial Mc Graw Hill.

García Llamas, M.C. (2010): Análisis de los métodos matemáticos aplicados a las ciencias sociales y su adaptación al espacio europeo de educación superior. Tesis doctoral no publicada.

González García, F.; Ibáñez Moya, F.C.; Casali Sarasíbar, J.; López Rodríguez. J.; Novak, J.D. (2000): Una aportación a la mejora de la calidad de la docencia universitaria: los mapas conceptuales. Editado por Universidad Pública de Navarra.

Ontoria, A (1993): Mapas Conceptuales. Una técnica para aprender. Editorial Narcea.

Serrado, A., Cardeñoso, J.M., Azcarate, P. (2004): Los mapas conceptuales y el desarrollo profesional del docente. Proceedings of the First International Conference on Concept Mapping. Pamplona.

Silva Olivares, J.A. (2006): Una Experiencia Educativa con mapas conceptuales y matemática elemental en un entorno tradicionalista. Proceedings of the Second International Conference on Concept Mapping. Costa Rica.

Sydsaeter, K. Hammond, P.J. (1996): Matemáticas para el análisis económico. Editorial Prentice Hall.